**Внимание!** Эти билеты были написаны мной в “сессионном” бреду и могут содержать ошибки. Не ботайте по ним и не используйте их в качестве шпор. Вообще не читайте их. Это опасно.

*EyeScream*

|  |  |
| --- | --- |
| **1** | **Вещественные числа и правила их сравнения. Теорема о существовании верхней (нижней) грани у ограниченного сверху (снизу) множества вещественных чисел.** |

**Рациональным** называется число, представимое в виде отношения двух целых чисел. Рациональные числа обладают следующими свойствами:

1. Любые два числа *a* и *b* связаны ровно одним среди знаков “<”, “>”, “=”. Если *a* < *b*, то *b* > *a*.
2. Существует правило, ставящее в соответствие любым числам *a* и *b* число *c*, называемое их суммой и обозначаемое *с* = *a* + *b*.
3. Существует правило, ставящее в соответствие любым числам *a* и *b* число *c*, называемое их произведением и обозначаемое *с* = *ab*.
4. Правило упорядочения: если *a* > *b* и *b* > *c*, то *a* > *c* (свойство транзитивности знака “>”), если *a* = *b* и *b* = *c* следует, что *a* = *c* (свойство транзитивности знака “=”).
5. Свойство коммутативности сложения: *а* + *b* = *b* + *a*.
6. Свойство ассоциативности сложения: (*a* + *b*) + *c* = *a* + (*b* + *c*).
7. Существует число 0 такое, что *a* + 0 = *a* для любого числа *a* (особая роль нуля).
8. Для каждого числа *a* существует число *a*′ такое, что *a* + *a*′ = 0.
9. Свойство коммутативности умножения: *ab* = *ba*.
10. Свойство ассоциативности умножения: (*ab*) *c* = *a* (*bc*).
11. Существует число 1 такое, что 1 *a = a* для любого числа *a* (особая роль единицы).
12. Для каждого числа *a*, отличного от 0, существует обратное ему число *а*′ такое, что *аа′ =* 1.
13. Свойство дистрибутивности операции умножения относительно суммы: (*a* + *b*) *c* = *ac* + *bc*.
14. Из *a* > *b* вытекает *a* + *c* > *b* + *c* для любых *a*, *b*, *c*.
15. Из *a* > *b* и *c* >0 следует *ac* > *bc*.
16. Каково бы ни было число *a*, можно число 1 повторить слагаемым столько раз, что сумма превзойдет *а* (аксиома Архимеда).

Каждому рациональному числу соответствует определенная точка на числовой оси, но не каждой точке можно сопоставить рациональное число. Если выбрать точку M такой, чтобы длина отрезка OM равнялась диагонали квадрата со стороной OE (длина масштабного отрезка), то по теореме Пифагора эта длина *x* отрезка OM является корнем уравнения *x*2 = 2 и это — нерациональное число.

Докажем, что посредством измерения отрезка OM каждой точки оси можно поставить в соответствие бесконечную десятичную дробь. Возможны два случая:

1. Отрезок OE укладывается в отрезке OM целое число *a*0 раз с некоторым остатком NM, меньшим OE. Тогда целое число *a*0 представляет отрезок OM с точностью до числа 1 по недостатку.
2. Отрезок OE укладывается в отрезке OM целое число *a*0 раз без остатка. В этом случае *a*0 представляет длину отрезка OM. Формально точке M соответствует число *a*0,00000…

Далее для первого случая продолжаем подобные рассуждения, вместо OE укладывая отрезки длины 1/10 OE в отрезок NM и получая тем самым число *a*1. В итоге мы получаем бесконечную десятичную дробь вида *a*0, *a*1*a*2*a*3… Таким образом мы поставили в соответствие точке M некоторое конкретное число.

Числа представимые бесконечными десятичными дробями, как положительными так и отрицательными, называются **вещественными**. Для вещественных чисел выполняются те же 16 вышеуказанных свойств, что и для рациональных.

Назовем **модулем** вещественного числа *а* эту же бесконечную десятичную дробь, взятую со знаком “+”.

Два числа *a* и *b* называются равными, если их представления в виде бесконечных десятичных дробей имеют одинаковые знаки и либо справедливы равенства *a*i = *b*i, либо они представляют одно и то же рациональное число, являясь его разными записями.

При сравнении чисел *a* и *b* возможны 3 случая:

* оба числа неотрицательны, в этом случае в силу их неравенства хотя бы одно из равенств *a*i = *b*i нарушится. Обозначим через *k* наименьший из таких номеров *i*. Тогда между числами *a* и *b* стоит такой же знак, что и между числами *a*k и *b*k;
* оба числа отрицательны, тогда рассмотрим их модули (по 1 случаю) и возьмем противоположный знак;
* одно из чисел отрицательно, а второе — неотрицательно, тогда первое всегда меньше второго.

**Лемма.** Если *a* — произвольное неотрицательное число, а *b*′ и *b*″ — два различных представления одного и того же рационального числа, то знак между *a* и *b*′ такой же, как и между *a* и *b*″. **Доказательство:** разбить на 4 утверждения, рассмотреть 2 из них (остальные два — симметричные).

Множество вещественных чисел **ограничено сверху**, если существует такое вещественное число *M*, что каждый элемент *x* этого множества не больше *M*. При этом число *M* называется верхней гранью мн-ва {*x*}.

Наименьшая из всех верхних граней ограниченного сверху мн-ва называется **точной верхней гранью** этого множества.

**Теорема.** Если множество {*x*} непустое и ограничено сверху, то у него существует точная верхняя грань. **Доказательство:** рассмотреть два случая — когда среди элементов множества есть хотя бы одно неотрицательное вещественное число, и когда все элементы отрицательны. В первом случае отбрасываются все отрицательные числа и рассматриваются оставшиеся неотрицательные. Далее среди элементов мн-ва выбирается наибольшая целая часть *a*0 (такой элемент найдется, т. к. мн-во ограничено сверху). Среди всех элементов с такой целой частью выбирается элемент с наибольшим первым десятичным знаком после запятой (*a*1). Продолжая аналогичные рассуждения мы получим число *a*, которое удовлетворяет определению точной верхней грани. Первый случай доказан, во втором случае все аналогично за исключением того, что брать надо наименьшие из десятичных знаков.

|  |  |
| --- | --- |
| **2** | **Приближение вещественного числа рациональным. Арифметические операции над вещественными числами. Свойства вещественных чисел.** |

**Утверждение.** Любое вещественное число можно с наперед заданной точностью приблизить рациональными числами. **Доказательство:** рассмотрим неотрицательное вещественное число *а*. Обрывая его дробное представление на *n*-м знаке после запятой, мы получим рациональное число, не большее *а*. Увеличив его последний ненулевой десятичный знак на единицу (с переносом, если это нужно), получим второе рациональное число, не меньшее *а*. Таким образом, для любого номера *n* есть два ограничивающие его рациональных числа такие, что они отличаются на 10– *n*.

Тогда справедлива **лемма 1**, где все то же самое, только 10– *n* заменяется на эпсилон.

**Лемма 2.** Для любых двух вещественных чисел найдется такое рациональное число, что оно заключено между ними. **Доказательство:** рассматривается неотрицательный случай. Найдем «скачок» в числах (то есть тот десятичный знак *k*, начиная с которого нарушается равенство). Далее оставим в покое все следующие нули (если они есть), и первый ненулевой знак уменьшим на единицу, а дальше допишем девятки. Это число и будет искомым.

**Лемма 3.** Если можно два вещественных числа «подставить» в лемму 1 с одинаковыми числами их ограничивающими, причем разность между последними будет произвольно малой, то это два числа равны. **Доказательство:** от противного, далее по лемме 2.

**Суммой** двух вещественных чисел *а* и *b* называется такое вещественное число *х*, что для любых рациональных чисел, ограничивающих *а* и *b*, их суммы ограничивают *х*. **Произведением** двух положительных вещественных чисел *а* и *b* называется такое вещественное число *х*, что для любых рациональных чисел, ограничивающих *а* и *b*, их произведения ограничивают *х*.

**Уточненное определение вещественного числа:** вещественными называются числа, представимые в виде бесконечных десятичных дробей, при условии, что для них определены вышеуказанным образом операции сравнения, сложения и умножения.

**Теорема о существовании суммы двух вещественных чисел.** Для любых двух вещественных чисел существует их сумма. **Доказательство:** фиксируем ограничители сверху и рассматриваем всевозможные ограничения снизу. Множество сумм нижних ограничителей ограничено сверху (суммой верхних ограничителей). Значит, у этого мн-ва есть точная верхняя грань. Эта верхняя грань и является искомым значением суммы, т. к. удовлетворяет определению.

**Теорема о единственности суммы двух вещественных чисел.** Существует только одна сумма вещественных чисел. **Доказательство:** пусть существует две суммы, рассматриваем сумму из неравенств ограничителей. Возьмем такие ограничители, что разность между ними равна ε / 2. Получим, что между ограничителями на сумму разность равна ε, то есть любому произвольному числу. Из леммы 3 две суммы получились равными. Забавно, не так ли?

**Свойства вещественных чисел.** Свойства 1-4 доказаны выше, свойства 5-8 вытекают из определения суммы. **Доказательство свойства 14:** составляем тандем из ограничителей и чисел (полагая *а* **<** *b*). Обозначим разность верхнего ограничителя *а* и нижнего ограничителя *b* как ε и ограничим *с* так, чтобы разность между ограничителями равнялась ε. Далее выписываем тандем из сумм и получаем необходимый результат. Свойства 9-13 и 15 доказываются непосредственно из определения произведения.

|  |  |
| --- | --- |
| **3** | **Счетные множества и множества мощности континуум. Неэквивалентность счетного множества множеству мощности континуум.** |

Множества А и В называются **эквивалентными**, если между элементами в них существует взаимно однозначное (биективное) соответствие. В частности, конечные множества эквивалентны, если количество элементов в них одинаково.

**Теорема.** Можно показать, что мн-ва ***R*** и ***N*** эквивалентны. **Доказательство:** вводится понятие высоты дроби как суммы модуля числителя и значения знаменателя. Далее подряд нумеруются дроби высоты 1, затем высоты 2 и т. д.

Множество называется **счетным**, если оно эквивалентно мн-ву натуральных чисел.

**Теорема.** Всякое непустое подмножество счетного мн-ва является или счетным мн-вом, или имеет конечное число элементов. **Доказательство:** нумерация А, затем нумерация подмножества, сопоставление одного другому.

**Теорема.** Множество всех точек сегмента [0, 1] несчетно. **Доказательство:** рассматриваем интервал, выписываем числа, производим диагональную процедуру Кантора.

Множество, эквивалентное множеству [0, 1] называется **множеством мощности континуума**.

|  |  |
| --- | --- |
| **4** | **Ограниченные и неограниченные последовательности. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности.** |

**Последовательностью** называется множество занумерованных чисел, которые по некоторому закону ставятся в соответствие натуральным числам. Последовательность называется **ограниченной сверху**, если существует вещественное число *М*, не меньшее любого из элементов последовательности. Последовательность называется **бесконечно большой**, если для любого положительного вещественного числа *А* найдется номер, начиная с которого все элементы последовательности по модулю будут больше, чем *А*. Всякая бесконечно большая последовательность неограниченна. Последовательность называется **бесконечно малой**, если для любого сколь угодно малого положительного вещественного числа ε найдется такой номер, начиная с которого элементы последовательности по модулю будут меньше ε.

**Теорема.** Сумма (и разность) двух бесконечно малых последовательностей (БМП) есть БМП. **Доказательство:** фиксируем ε, и для обеих последовательностей такой номер *п*, чтобы элементы, начиная с него, были по модулю меньше ε / 2. Складываем соответствующие неравенства и радуемся.

**Теорема.** Произведение БМП А на ограниченную последовательность В есть БМП. **Доказательство:** Пусть В ограничена числом *М* сверху. Фиксируем положительное число ε и рассматриваем определение БМП для числа ε / *М*. Умножаем одно на другое и получаем результат.

**Теорема.** Всякая БМП ограничена. **Доказательство:** Рассмотрим число ε и все элементы последовательности до «барьерного». Выберем из них наибольший.

**Теорема.** Если все элементы БМП равны, то это 0. **Доказательство:** от противного.

|  |  |
| --- | --- |
| **5** | **Понятие сходящейся последовательности (СП). Единственность предела, ограниченность СП, арифметические операции над СП.** |

Последовательность {*x*n} называется **сходящейся**, если существует такое число *а*, что последовательность {*x*n – *a*} является бесконечно малой. Число *а* называется **пределом** последовательности. Из определения следует, что удаление любого конечного числа элементов последовательности не влияет на ее сходимость и величину предела.

Представление в **специальном виде**: каждый элемент представляется в виде *x*i= *a* + *α*i, где *a* — предел последовательности, а *α*i — БМП.

**Теорема о единственности предела.** СП имеет один предел. **Доказательство:** от противного (пусть существуют два предела — *а* и *b*), далее представляем в специальном виде и рассматриваем разность БМП из этого вида. Получим, что все элементы полученной БМП равны *а* – *b* и в то же время (по ранее доказанному) равны 0. Тогда *а* = *b*.

**Теорема об ограниченности СП.** Всякая СП ограниченна. **Доказательство:** фиксируем некоторое число ε, находим соответствующий ему номер *N* и выбираем в качестве грани наибольшее из чисел | *a* – ε |, | *a* + ε | и модулей предшествующих *N*-му элементов. Это и будет верхняя грань.

**Теорема о сумме (разности) СП.** Сумма (разность) двух СП сходится к сумме их пределов. **Доказательство:** переводим в специальный вид, рассматриваем сумму, далее по определению.

**Теорема о произведении СП.** Произведение двух СП сходится к произведению их пределов. **Доказательство:** перемножаем специальные представления, далее по определению.

**Лемма.** Если последовательность {*y*n} сходится к ненулевому пределу *а*, то, начиная с некоторого номера, определено частное {1 / *y*n}, являющееся ограниченной последовательностью. **Доказательство:** пусть ε = | *a* | / 2, тогда найдется номер *N*, начиная с которого все клево. Тогда | *y*n | **>**   
| *a* | / 2, начиная все с того же *N*. Переворачивая дроби, получим условие ограниченности.

**Теорема о частном СП.** Предел частного двух СП (предел второй отличен от 0) равен частному пределов. **Доказательство:** будем рассматривать частное начиная с номера *N*, определенного в лемме. Представляем в специальном виде и рассматриваем разность (*x*n / *y*n) – (*a* / *b*). Подставляем специальное представление и получаем в правой части БМП.

|  |  |
| --- | --- |
| **6** | **Предельный переход в неравенствах. Теорема о пределе монотонной ограниченной последовательности. Число е.** |

**Теорема.** Если все элементы СП {*x*n} (возможно, начиная с некоторого номера) не меньше (не больше), чем *b*, то и предел этой последовательности *a* не меньше (не больше), чем *b*. **Доказательство:** обозначим номер, с которого начинает выполняться условие, как *N\**. Делаем предположение, что предел меньше *b*. Тогда для числа *b* – *a* в качестве ε найдется соответствующий номер *N*, причем выберем его большим, чем *N*\*. Тогда | *x*n – *a* | **<** *b* – *а*, откуда следует *x*n – *a* **<** *b* – *а* или *x*n **<** *b*. Пришли к противоречию, теорема доказана.

**Замечание.** Соответствующее утверждение для строгих знаков неверно, например для последовательности {1 / *n*} — любой элемент больше 0, а предел равен 0.

**Следствие 1.** Можно делать предельный переход в неравенствах с СП. **Доказательство:** перенести все в одну часть и применить теорему.

**Следствие 2.** Если все элементы СП заключены на отрезке [*a*, *b*], то и предел этой последовательности лежит на том же отрезке. **Доказательство:** очевидно даже мне.

**Теорема «о двух милиционерах».** Если две сходящиеся последовательности имеют общий предел *а* и элементы третьей последовательности (с некоторого номера) лежат между элементами этих двух, то она сходится к тому же пределу *а*. **Доказательство:** введем *N*\* (так же, как раньше). Тогда *x*n – *a* < *z*n – *a* < *y*n – *a*. Сравниваем модуль центра с наибольшим из модулей боков (он меньше или равен). Фиксируем ε и выбираем такое число *N*, чтобы начиная с него работал ε для обеих последовательностей и оно было больше *N*\*. Подставим условия сходимости в неравенство с модулями и получим, что хотели.

Последовательность называется **неубывающей**, если каждый ее элемент, начиная со второго, не меньше предыдущего. Последовательность называется **невозрастающей**, если каждый ее элемент, начиная со второго, не больше предыдущего. Последовательность называется **монотонной**, если она либо неубывающая, либо невозрастающая.

**Теорема о пределе монотонной ограниченной последовательности.** Если неубывающая последовательность ограничена сверху, то она сходится. **Доказательство:** у этой последовательности существует точная верхняя грань, равная *М*. Докажем, что *М* и есть предел этой последовательности. Во-первых, любой элемент не больше *М* (это раз). Фиксируем ε и замечаем, что по определению точной верхней грани найдется хотя бы один элемент, больший *М* – ε. Далее, вспомним, что последовательность неубывающая, значит, начиная с этого элемента все будут находиться на полуотрезке [*M* – ε, *M*] (это два). Из раз и два получается сходимость к точке *M*.

**Замечание.** Не всякая сходящаяся последовательность является монотонной. Пример: 1/2, –1/2, 1/3, –1/3,…

**Теорема.** Последовательность (1 + 1 / *n*)n сходится. Предел ее называют числом *е*. **Доказательство:** бином Ньютона (для двух последовательных членов) — доказательство монотонности. Дальше заменяем в биномиальном разложении все скобки (то есть все, кроме 1 / *k*!) на единицы, а каждый факториал — на соответствующую степень двойки. Получим, что любое число из этой последовательности меньше 3. Значит, она сходится.

Можно доказать (отбросив все члены, кроме первого в биномиальном разложении), что *е* заключено на интервале (2, 3).

|  |  |
| --- | --- |
| **7** | **Понятие предельной точки посл. Теорема о существовании верхнего и нижнего предела у огр. посл. Теорема Больцано-Вейерштрасса.** |

**Подпоследовательностью** называется последовательность, составленная из некоторых упорядоченных по номеру элементов данной последовательности.

**Теорема.** Если последовательность сходится к *а*, то и любая ее подпоследовательность сходится к *а*. **Доказательство:** фиксируем ε и номер *N*, соответствующий этому ε. Выберем также соответствующий номер из подпоследовательности. Получим для всех последующих элементов определение.

**Теорема.** Если все подпоследовательности сходятся, то их предел одинаков и равен пределу всей последовательности. **Доказательство:** из предыдущего и определения.

Точка называется **предельной точкой** последовательности, если в ее ε-окрестности находится бесконечно элементов этой последовательности *или* если из этой последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к этой точке.

Наибольшая предельная точка последовательности называется ее **верхним пределом**, а наименьшая — **нижним пределом**.

**Теорема.** У всякой ограниченной последовательности существует верхний и нижний предел и, в частности, хотя бы одна предельная точка. **Доказательство:** будем доказывать существование верхнего предела и хотя бы одной предельной точки (т. к. доказательство существования нижнего предела симметрично). Пусть последовательность ограничена снизу числом *m*, а сверху — числом *М*. Рассмотрим множество {*x*} всех элементов последовательности таких, что правее каждого из них либо совсем нет других элементов, либо их конечное количество. Это множество ограничено (например, числами *m* и *М*), поэтому у него есть точная нижняя грань *a*. Докажем, что значение точной нижней грани совпадает со значением верхнего предела. Для этого утверждается следующее:

* найденное число является предельной точкой последовательности. Фиксируем ε. По определению точной нижней грани на интервале (*x* – ε, *a*) нет элементов множества {*x*}. Значит там есть бесконечно много элементов последовательности, а значит по определению *а* — предельная точка;
* не существует числа *а*′, большего *а*, являющегося предельной точкой. Пусть *а*′ — любое число, большее *а*. Введем ε = (*а*′ – *а*) / 2. Тогда интервалы ε-окрестностей точек *а* и *а*′ не будут пересекаться. Согласно описанию мн-ва {*x*}, правее *a* + ε лежит не более, чем конечное число элементов последовательности. Это значит, что и в ε-окрестности точки *а*′ лежит не более, чем конечное число элементов последовательности, а значит *а*′ не является предельной точкой.

**Следствие 1.** Все элементы ограниченной последовательности, начиная с некоторого номера, лежат на интервале (*a* – ε, *b* + ε), где *a* — нижний, а *b* — верхний предел этой последовательности. **Доказательство:** честно рассмотреть эти окрестности для ε / 2.

**Следствие 2.** Пусть последовательность имеет своим нижним пределом число *а*, а верхним число *b*, кроме того, пусть вне интервала (*x*, *y*) находится не более, чем конечное число элементов последовательности. Тогда интервал (*a*, *b*) лежит внутри интервала (*х*, *у*). **Доказательство:** рассмотреть неравенства для границ.

**Теорема Больцано-Вейерштрасса.** Из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность. **Доказательство:** из теоремы и определения предельной точки.

|  |  |
| --- | --- |
| **8** | **Необходимое и достаточное условие сходимости последовательности (критерий Коши).** |

Последовательность называется **фундаментальной**, если для любого положительного ε найдется такой номер *N*, что для любых *m* **>** *n* > *N* справедливо неравенство | *x*m – *x*n | **<** ε.

**Свойство 1.** Для любого положительного ε найдется элемент фундаментальной последовательности такой, что в ε-окрестности этого элемента находятся все последующие элементы последовательности. **Доказательство:** фиксируем ε и, считая *n* константой, подставляем в определение.

**Свойство 2.** Фундаментальная последовательность ограничена. **Доказательство:** фиксируем ε, в силу свойства 1 для этого ε найдется такое *N*, что все последующие элементы будут находиться в ε-окрестности элемента *х*N. Обозначим через *М* наибольший из модулей предшествующих *N*-му элементов, | *x*N + ε | и | *x*N – ε |. *M* ограничивает последовательность сверху.

**Теорема.** Для того, чтобы последовательность сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной и ее верхний и нижний предел совпадали. **Доказательство:**

1. *Необходимость.* Пусть некоторая последовательность сходится. Тогда она ограничена и имеет единственную предельную точку. Это означает, что верхний и нижний пределы совпадают.
2. *Достаточность.* Пусть последовательность ограничена (а значит, имеет верхний и нижний пределы) и ее верхний и нижний пределы совпадают. Пусть они равны *х*. Согласно ранее доказанному, начиная с некоторого номера, все элементы лежат на интервале (*х* – ε, *х* + ε). А это и есть определение сходящейся к *х* последовательности.

**Критерий Коши.** Для того, чтобы последовательность сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной. **Доказательство:**

1. *Необходимость.* Пусть последовательность сходится к некоторому пределу *х*. При фиксированном ε найдется номер *N*, такой что для всех последующих номеров *n*: | *x*n – *x* | **<** ε / 2. Далее *n* заменяется на *n* + *p* в предыдущем неравенстве и делается такое вот чудо:  
   | *x*n + p – *x*n | = | (*x*n + p – *x*) + (*x* – *x*n) | < | *x*n + p – *х* | + | *x* – *x*n | **<** ε, что и означает фундаментальность последовательности.
2. *Достаточность.* Пусть последовательность фундаментальна. Для сходимости достаточно, чтобы последовательность была ограниченной и верхний предел совпадал с нижним. Ограниченность доказана выше (свойство 2). Фиксируем ε. Далее по свойству 1 и следствию 2 из теоремы о верхнем и нижнем пределе получим, что разность между ними не больше, чем 2ε, и неотрицательна. В силу произвольности выбора ε получим, что пределы совпадают.

|  |  |
| --- | --- |
| **9** | **Два определения предельного значения функции (по Гейне и по Коши) и доказательство их эквивалентности. Критерий Коши существования предела функции.** |

**Определение по Гейне.** Число *b* называется **пределом** **функции *y*(*x*) в точке *а***, если для любой последовательности значений аргумента, сходящейся к *а*, и состоящей из элементов, отличных от *а*, соответствующая последовательность значений функции сходится к числу *b*.

**Определение по Коши.** Число *b* называется **пределом функции *y*(*х*) в точке *а***, если для любого положительного ε найдется такое δ(ε), что для всех значений аргумента *х*, лежащих в проколотой δ-окрестности точки *а* справедливо неравенство | *f*(*x*) – *b* | **<** ε.

**Теорема.** Определения предела функции в точке по Коши и по Гейне эквивалентны. **Доказательство:**

1. Пусть *b* — предел функции *y* в точке *а* по Коши. Пусть {*x*n} — любая сходящаяся к точке *а* последовательность значений аргумента, все элементы которой отличны от *а*. Фиксируем ε и по нему соответствующее δ. В силу сходимости последовательности {*x*n} к *а* найдется такой номер *N*, что для *n* > *N* справедливо 0 **<** | *x*n – *a* | **<** δ, и, по определению Коши, также верно неравенство | *f*(*x*n) – *b* | **<** ε, что означает, что последовательность значений сходится к *b*.
2. Пусть теперь число *b* — предел функции по Гейне. Предположим, что оно не является пределом функции по Коши. Тогда для некоторого положительного ε и сколь угодно малого положительного δ найдется хотя бы одно *х* такое, что 0 **<** | *x*n – *a* | **<** δ и | *f*(*x*n) – *b* | > ε. Возьмем вместо δ последовательность {1 / *n*}. Тогда по предположению для каждого ее элемента найдется хотя бы одно значение аргумента такое, что 0 **<** | *x*n – *a* | **<** 1 / *n* и | *f*(*x*n) – – *b* | > ε. Из первого неравенства следует, что последовательность {*x*n} сходится к *а* и состоит из элементов, не равных *а*. Тогда по определению по Гейне соответствующая последовательность {*f*(*x*n)} должна сходиться к *b*, а этому противоречит второе неравенство.

Будем говорить, что ф-ия *у* удовлетворяет в т. *а* **условию Коши**, если для любого положительного числа ε найдется соответствующее число δ такое, что для любых двух значений аргумента *х*′и *х*″, удовлетворяющих условиям 0 **<** | *x*′ – *a* | **<** δ и 0 **<** | *x*′′ – *a* | **<** δ, справедливо | *f*(*x*′) – *f*(*x*″) | **<** ε.

**Критерий Коши для функций.** Для того, чтобы ф-ия имела предел в точке, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла критерию Коши в этой точке. **Доказательство:**

1. *Необходимость.* Пусть существует предел *b* функции в данной точке. Фиксируем ε. Применяем определение по Коши предела ф-ии в точке для ε / 2 в точках *х*′и *х*″. Складываем неравенства для значения функции и получаем условие Коши.
2. *Достаточность.* Пусть ф-ия удовлетворяет в точке *а* условию Коши. Пусть {*x*n} — любая сходящаяся к точке *а* последовательность значений аргумента, все элементы которой отличны от *а*. Нужно доказать, что последовательность значений ф-ии сходится к *b*, и что это число *b* не зависит от выбора последовательности.

* Докажем сначала, что последовательность значений сходится. Фиксируем ε и соответствующее δ (по условию Коши). Найдется такой номер *N*, что для всех последующих *n* верно 0 **<** | *x*n – *a* | **<** δ. Можно заменить *n* на *n* + *p*. Применяем условие Коши и получаем фундаментальную последовательность, которая сходится по критерию Коши для последовательностей.
* Теперь докажем что значение предела не зависит от выбора последовательности значений аргумента. Предположим, что это не так, и в результате мы получили два разных предела *b* и *b*′. Рассмотрим последовательность вида *x*1, *x*1′, *x*2, *x*2′,… Она также сходится к *а* и состоит из отличных от *а* элементов. Значит соответствующая последовательность значений функции должна сходиться к некоторому пределу *b*″. Но тогда и любая ее подпоследовательность должна сходиться к тому же пределу. Отсюда *b* = *b*′ = *b*″.

|  |  |
| --- | --- |
| **10** | **Арифметические операции над функциями, имеющими предельное значение. Бесконечно малые и бесконечно большие ф-ии и принципы их сравнения.** |

**Теорема.** Пусть две функции *f* и *g* заданы на одном и том же множестве и имеют в точке *а* пределы *b* и *с* соответственно. Тогда ф-ии *f* + *g*, *f – g*, *fg*, *f* / *g* имеют в этой точке пределы, соответственно равные *b + c*, *b – c*, *bc*, *b* / *c*. **Доказательство:** рассмотрим произвольную сходящуюся к *а* последовательность значений аргумента, отличных от *а*. Тогда соответствующие последовательности значений ф-ий сходятся к *b* и *c* (для *f* и *g* соответственно). Но тогда последовательности {*f*(*x*n) + *g*(*x*n)} и т. д. сходятся к указанным выше пределам. В силу произвольности выбора последовательности значений аргумента и в силу определения по Гейне получили, что хотели.

Функция называется **бесконечно малой в точке *а***, если ее предел в этой точке равен 0.

Функция называется **бесконечно большой в точке *а* справа**, если для любой сходящейся к *а* последовательности значений аргумента, все элементы которой строго больше *а*, соответствующая последовательность значений функции является бесконечно большой, причем все элементы, начиная с некоторого номера, либо положительны, либо отрицательны.

Если ф-ия *f*(*x*) имеет предел *b* в точке *а*, то можно представить ее в виде *f*(*x*) = *b* + α(*x*), где α(*x*) — бесконечно малая в точке *а* ф-ия.

Пусть α и β — две бесконечно малых в точке *а* функции. Тогда α является бесконечно малой **более высокого порядка**, чем β, если предел их отношения в этой точке равен 0 (запись α = о(β)). Если этот предел равен отличному от нуля конечному числу, то эти функции имеют **одинаковый порядок малости** в точке *а*. Бесконечно малые **эквивалентны**, если предел равен 1.

**Свойства символа «о малое»:**

* о(β) + о(β) = о(β);
* о(β) + о(о(β)) = о(β);
* αβ = о(α) = о(β).

Аналогично для бесконечно больших функций. Функция А имеет **более высокий порядок роста** в точке *а* справа, чем функция В, если отношение их является бесконечно большой функцией в данной точке справа; и **одинаковый порядок роста**, если предел этого отношения равен конечному числу, отличному от 0.

|  |  |
| --- | --- |
| **11** | **Понятие непрерывности функции в точке и на множестве. Арифметические операции над непрерывными функциями. Классификация точек разрыва.** |

Функция *f* называется **непрерывной в точке** ***а***, если она имеет в этой точке предел и этот предел равен значению ф-ии в этой точке. Функция *f* называется **непрерывной в точке *а* справа**, если правый предел в этой точке существует и равен значению ф-ии в этой точке. Точки, в которых функция не обладает свойством непрерывности, называются **точками разрыва**. Функция **непрерывна на множестве**, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

**Теорема.** Пусть на одном и том же множестве заданы ф-ии *f* и *g*, непрерывные в точке *а*. Тогда функции, получаемые в результате арифметических операций, непрерывны в точке *а*. **Доказательство:** считаем значения пределов и значения самих ф-ий, убеждаемся в том, что они равны.

Точки разрыва делятся на три класса: **точки разрыва первого рода** (в случае, когда односторонние пределы в точке не совпадают), **точки разрыва второго рода** (в случае, когда предел в точке не существует) и **точки устранимого разрыва** (в случае, когда односторонние пределы равны).

|  |  |
| --- | --- |
| **12** | **Локальные свойства непрерывных функций. Непрерывность сложной функции.** |

Пусть ф-ия φ(*t*) задана на множестве {*t*} и {*x*} — множество ее значений. Пусть на множестве {*x*} задана ф-ия *y* = *f*(*x*).

**Теорема.** Пусть ф-ия *f* задана на мн-ве {*x*}, непрерывна в точке *а* и ее значение *f*(*a*) положительно. Тогда существует такое положительное δ, что ф-ия *f* является положительной всюду на δ-окрестности точки *а* (в пересечении с {*x*}). **Доказательство:** по определению по Коши для любого ε найдется соответствующее ему δ такое, что для всех значений аргумента из δ-окрестности справедливо | *f*(*x*) – *f*(*a*) | **<** ε. Если в качестве ε взять | *f*(*a*) | / 2 и развернуть модуль, то крайние числа будут положительны при *f*(*a*) **>** 0 и отрицательны при *f*(*a*) **<** 0. Это то, что надо.

**Теорема.** Пусть ф-ия *f* задана на множестве {*x*} и непрерывна в точке *а* этого множества справа и ее значение *f*(*a*) отлично от 0. Тогда найдется такое положительное δ, что ф-ия *f*(*x*) не обращается в 0 и имеет тот же знак, что и в точке *а*, для всех значений из мн-ва {*x*}, принадлежащих правой δ-полуокрестности точки *а*. **Доказательство:** аналогично предыдущей теореме.

ЕЩЕ ТУТ ЕСТЬ ОДНА ТЕОРЕМА

**Теорема.** Пусть ф-ия φ непрерывна в точке *а*, а ф-ия *f* — в точке *b* = φ(*a*). Тогда сложная ф-ия *F = f*(φ(*t*)) непрерывна в точке *а*. **Доказательство:** рассмотрим произвольную последовательность значений аргумента *t*, сходящуюся к *а*. Так как φ непрерывна в точке *а*, то этой последовательности соответствует последовательность значений функции, сходящаяся к *b*. Далее, эта последовательность является последовательностью значений аргумента для ф-ии *f*, тогда по определению она сходится к *F*(*a*). Это и есть непрерывность в дуэте с определением по Гейне.

|  |  |
| --- | --- |
| **13** | **Обратная функция. Условия непрерывности монотонных функций  и обратных функций.** |

Пусть ф-ия *у = f*(*х*) определена на сегменте [*a*, *b*] и пусть сегмент [α, β] является множеством значений этой функции. Пусть также каждому *у* из этого сегмента соответствует ровно одно значение *х* из сегмента [*a*, *b*]. Тогда на этом сегменте существует **обратная *f* функция** *x = f* –1(*y*).

**Лемма.** Если ф-ия *f*(*x*) является монотонной на сегменте [*a*, *b*], то у нее существуют правый и левый пределы в каждой внутренней точке сегмента, левый предел в т. *b* и правый предел в т. *a*. **Доказательство:** ограничимся тем, что докажем существование правого предела в любой точке *с* полуинтервала [*a*, *b*), и рассмотрим неубывающую функцию. Рассмотрим множество всех значений функции для рассматриваемых точек. Оно непустое и ограниченное снизу, значит у него есть точная нижняя грань *m*. Докажем, что это число и является правым пределом в точке *с*. Фиксируем ε, по определению точной нижней грани найдется такое δ, что *f*(*c* + *b*) **<** *m* + ε. Но тогда для всех *х* из интервала (*с*, *с* + δ) выполняется неравенство *m* < *f*(*x*) **<** *m* + ε. Тогда | *m* – *f*(*x*) | **<** ε. А это и значит, что число *m* является правым пределом в точке *с*.

**Теорема.** Пусть ф-ия *y*(*x*) возрастает на сегменте [*a*, *b*] и пусть α = *f*(*a*), β = *f*(*b*). Если множеством значений функции на этом отрезке является сегмент [α, β], то на нем определена обратная ф-ия *х*(*у*), также возрастающая. **Доказательство:** очевидно.

**Теорема.** Пусть ф-ия *y*(*x*) возрастает на сегменте [*a*, *b*] и пусть α = *f*(*a*), β = *f*(*b*). Тогда условием непрерывности ф-ии на сегменте будет то, что любое число γ, заключенное между α и β, было значением этой ф-ии. **Доказательство:**

1. *Необходимость.* Пусть {*x*} — множество всех значений *х* из рассматриваемого сегмента, для которых *f*(*x*) < γ. Это множество непустое и ограниченное сверху. Тогда у него существует точная верхняя грань *с*. Осталось доказать, что *f*(*c*) = γ. Если *x* **<** *c*, то найдется *х*′ из полуинтервала (*x*, *c*], принадлежащее {*x*}, то есть *f*(*x*′) < γ. Тогда из возрастания ф-ии будет следовать, что *f*(*x*) < γ. Любое *х*, лежащее правее *с*, не входит в {*х*}, поэтому для него *f*(*x*) **>** γ. Теперь докажем, что *с* — внутренняя точка сегмента. Пусть *c = b*. Возьмем сходящуюся к *с* последовательность точек сегмента. Так как все ее элементы лежат левее *с*, то они не больше γ, а поэтому и предел этой последовательности не больше γ. Но ф-ия непрерывна в точке *с = b*, а значит этот предел равен β. Тем самым получим нер-во β < γ, что противоречит выбору γ. Отсюда *c* **<** *b*. Аналогично можно показать, что *a* **<** *c*. Таким образом, *с* — внутренняя точка сегмента [*a*, *b*]. Теперь рассмотрим две сходящиеся к *c* с разных сторон последовательности — возрастающую {*x*n′} и убывающую {*x*n″}. Предел каждой из них равен *f*(*c*). С другой стороны, т. к. последовательности сходятся с разных сторон, *f*(*c*) < γ и одновременно *f*(*c*) > γ. Отсюда единственным образом следует *f*(*c*) = γ.
2. *Достаточность.* Достаточно доказать, что *f*(*x*) непрерывна справа в любой точке полуинтервала [*a*, *b*) и слева в любой точке полуинтервала (*a*, *b*]. Ограничимся доказательством первого факта. Пусть ф-ия не непрерывна справа в некоторой точке *с*, лежащей на полуинтервале. Тогда ее правый предел, который существует в силу доказанной выше леммы, не равен значению *f*(*c*). Тогда α = *f*(*a*) < *f*(*c*) **<** *f*(*c* + 0) < *f*(*x*) < *f*(*b*) = β. Это значит, что в интервале (*f*(*c*), *f*(*c* + 0)) не содержится значений ф-ии, а это противоречит условию.

**Теорема.** Пусть ф-ия *y*(*x*) возрастает и непрерывна на сегменте [*a*, *b*] и пусть α = *f*(*a*), β = *f*(*b*). Тогда на сегменте [α, β] определена обратная ф-ия *x*(*y*), которая возрастает и непрерывна на этом сегменте. **Доказательство:** по предыдущей теореме мн-вом значений ф-ии является отрезок [α, β], по еще более предыдущей теореме на этом сегменте определена обратная ф-ия. Остается доказать, что обратная ф-ия непрерывна на сегменте. Для этого достаточно применить к ней предыдущую теорему.

|  |  |
| --- | --- |
| **14** | **Простейшие элементарные функции и их основные свойства.** |

Простейшие элементарные ф-ии: степенная, показательная, логарифмическая, синус, косинус, тангенс, котангенс, арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс.

НЕНУНАХ

|  |  |
| --- | --- |
| **15** | **Замечательные пределы. Предельный переход в неравенствах.** |

**Теорема.** Пусть в некоторой проколотой δ-окрестности точки *а* заданы три ф-ии *f*(*x*), *g*(*x*), *h*(*x*), из которых *f* и *g* имеют в т. *а* одинаковый предел, равный *b*. Тогда, если в указанной окрестности всюду справедливо *f*(*x*) < *h*(*x*) < *g*(*x*), ф-ия *h* имеет пределом в т. *а* то же значение *b*. **Доказательство:** рассмотрим произвольную сходящуюся к *а* последовательность значений аргумента, элементы которой отличны от *а*. Тогда, с одной стороны, соответствующие последовательности значений ф-ии сходятся к *b*, а с другой стороны справедливо *f*(*x*n) < *h*(*x*n) < *g*(*x*n). Тогда по теореме «о двух милиционерах» соответствующая последовательность для *h* также сходится к *b*, что и доказывает теорему.

**Теорема.** Предел ф-ии sin*x* / *x* в точке 0 существует и равен 1. **Доказательство:** Неравенство 0 **<** sin*x* **<** *x* **<** tg*x* (при 0 **<** *x* **<** π / 2) разделим на положительное sin*x* и получим 1 **<** *x* / sin*x* **<** 1 / cos*x*. Перевернем дроби и расширим интервал до (–π / 2, π / 2), т. к. все ф-ии четные. Обе боковые ф-ии имеют в точке 0 предел, равный 1, а значит и у центральной (sin*x* / *x*) предел тоже равен 1.

**Теорема.** Предел ф-ии (1 + *x*)1 / *x* в точке 0 существует и равен числу *е*. **Доказательство:** рассмотрим односторонние пределы, докажем, что они существуют и равны *е*.

1. *Правый предел.* Требуется доказать, что для любого ε найдется такое δ, что для любого *х* из интервала (0, δ) справедливо | *f*(*x*) – *e* | **<** ε. Фиксируем ε и рассматриваем две последовательности: *a*n = [1 + 1 / (1 + *n*)]n и *b*n = (1 + 1 / *n*)n + 1. Обе эти последовательности сходятся к *е*, значит, найдется такой номер *N*, начиная с которого одновременно справедливы нер-ва   
   | *a*n – *e* | **<** ε и | *b*n – *e* | **<** ε. Теперь убедимся в том, что если взять δ = 1 / *N*, то для любого *х* из интервала (0, δ) будет справедливо неравенство | *f*(*x*) – *e* | **<** ε. Пусть *n* = [ 1 / *x* ]. Тогда *n* < 1 / *x* **<** *n* + 1. Отсюда 1 + 1 / (*n* + 1) **<** 1 + *x* < 1 + 1 / *n*. Тогда *a*n – *e* **<** (1 + *x*)1 / *x*– *e* **<** *b*n – *e*.
2. *Левый предел.* Рассмотрим произвольную бесконечно малую последовательность отрицательных чисел, причем, начиная с того номера, с которого ее элементы по модулю меньше 1. Пусть *y*n = – [*x*n / (1 + *x*n)], тогда *x*n = –[*y*n / (1 + *y*n)]. Тогда *y*n — БМП из положительных чисел. Тогда lim *f*(*x*n) = lim (1 + *y*n)1 / yn lim (1 + *y*n).

**Теорема.** Предел ф-ии ln (1 + *x*) / *x* = 1 в т. 0. **Доказательство:** lim ln (1 + *x*) / *x* = lim ln (1 + *x*)1 / *x* = lim ln *e* = 1.

|  |  |
| --- | --- |
| **16** | **Прохождение непрерывной функции через  любое промежуточное значение.** |

**Теорема.** Пусть ф-ия непрерывна на сегменте [*a*, *b*], и пусть значения этой ф-ии на концах сегмента — числа разных знаков. Тогда внутри сегмента найдется такая точка ξ, значение ф-ии в которой равно 0. **Доказательство:** пусть *f*(*a*) **<** 0, *f*(*b*) **>** 0, а {*x*} — мн-во всех значений аргумента из рассматриваемого сегмента, для которых *f*(*x*) **<** 0. Это множество непустое и ограниченное сверху, тогда у него есть точная верхняя грань ξ. Эта точка — внутренняя точка сегмента (так как неподалеку от границ знак сохраняется согласно локальным свойствам непрерывной ф-ии). Докажем теперь, что *f*(ξ) = 0. Если это не так, то существует δ-окрестность этой точки, где ф-ия имеет определенный знак. А это невозможно по определению точной верхней грани. Теорема доказана.

**Теорема.** Пусть ф-ия непрерывна на сегменте [*a*, *b*], причем *f*(*a*) = α, *f*(*b*) = β. Пусть, далее, γ — любое число, заключенное между α и β. Тогда на сегменте [*a*, *b*] найдется точка ξ такая, что *f*(ξ) = γ. **Доказательство:** пусть α , β и γ — разные числа. Тогда α **<** γ **<** β. Рассмотрим ф-ию φ(*x*) = *f*(*x*) – γ. Эта ф-ия непрерывна на [*a*, *b*] и имеет на его концах значения разных знаков. Тогда внутри сегмента есть такая точка ξ, что *f*(ξ) – γ = 0, а значит *f*(ξ) = γ.

|  |  |
| --- | --- |
| **17** | **Ограниченность функции, непрерывной на сегменте (первая теорема Вейерштрасса).** |

**Первая теорема Вейерштрасса.** Если ф-ия непрерывна на сегменте [*a*, *b*], то она ограничена на этом сегменте. **Доказательство:** докажем ограниченность сверху. Пусть ф-ия не ограничена сверху. Тогда для любого натурального *п* найдется хотя бы одна точка *х*n из [*a*, *b*] такая, что *f*(*x*n) **>** *n*. Таким образом соответствующая последовательность значений ф-ии будет бесконечно большой. По теореме Больцано-Вейерштрасса из последовательности значений аргумента можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке ξ. Эта точка будет принадлежать сегменту [*a*, *b*]. В силу непрерывности ф-ии последовательность значений ф-ии также должна сходиться (к числу *f*(ξ)). Однако любая подпоследовательность бесконечно большой ф-ии — ББП. Полученное противоречие доказывает теорему.

|  |  |
| --- | --- |
| **18** | **О достижении функцией, непрерывной на сегменте, своих точной верхней и нижней граней (вторая теорема Вейерштрасса).** |

Число *М* называется **точной верхней гранью ф-ии** на данном множестве, если во-первых, для каждого значения *х* из этого множества справедливо неравенство *f*(*x*) < *M*, и, во-вторых, для любого положительного числа ε существует значение *х* из этого мн-ва такое, что для соответствующего значения *f*(*x*) справедливо *f*(*x*) **>** *M* – ε.

**Вторая теорема Вейерштрасса.** Если ф-ия непрерывна на сегменте [*a*, *b*], то она достигает на этом сегменте свои точную верхнюю и нижнюю грань. **Доказательство:** по первой теореме Вейерштрасса ф-ия ограничена на данном сегменте, поэтому у нее существует точная верхняя грань *М* и точная нижняя грань *m*. Остановимся на доказательстве достижимости *М*. Пусть точная верхняя грань недостижима, тогда можно рассмотреть ф-ию *F*(*x*) = 1 / (*M* – *f*(*x*)). Эта функция непрерывная и строго положительная на сегменте [*a*, *b*]. Тогда по первой теореме Вейерштрасса она ограничена некоторым числом *A* на этом сегменте, то есть *f*(*x*) < *M* – 1 / *A*. А это противоречит второй половине определения точной верхней грани.

|  |  |
| --- | --- |
| **19** | **Понятие равномерной непрерывности. Теорема Кантора.** |

Функция называется **равномерно непрерывной** на множестве {*x*}, если для любого положительного ε найдется соответствующее δ такое, что для всех *х*′ и *х*″ из мн-ва {*x*}, удовлетворяющих условию | *х*′ – *х*″ | **<** δ выполняется нер-во | *f*(*x*′) – *f*(*x*″) | **<** ε.

**Теорема Кантора.** Если ф-ия непрерывна на сегменте [*a*, *b*], то она и равномерно непрерывна на этом сегменте. **Доказательство:** предположим, что ф-ия не является равномерно непрерывной на данном сегменте. Тогда для некоторого ε и любого δ (сколь угодно малого) найдутся две точки сегмента *х*′ и *х*″ такие, что | *х*′ – *х*″ | **<** δ, но | *f*(*x*′) – *f*(*x*″) | > ε. Возьмем бесконечно малую последовательность δn = 1 / *n*. Тогда для данного ε и любого *n* найдутся две точки *х*n′ и *х*n″ такие, что | *х*n′ – *х*n″ | **<** δ, но | *f*(*x*n′) – *f*(*x*n″) | > ε. Последовательность {*x*n′} ограничена, поэтому по теореме Больцано-Вейерштрасса из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Предел ее обозначим ξ, он будет принадлежать сегменту [*a*, *b*]. Последовательность {*x*n′} будет также сходиться к ξ. Ф-ия непрерывна в каждой точке сегмента, а значит и в точке ξ. Тогда в силу определения по Гейне обе подпоследовательности соответствующих значений ф-ий обязаны сходиться к *f*(ξ), то есть разность этих подпоследовательностей есть БМП. Это противоречит правому из последних неравенств. Теорема доказана.

Пусть ф-ия ограничена на данном сегменте [*a*, *b*]. Назовем **колебанием ф-ии на этом сегменте** разность ω = *М* – *т* между точной верхней и точной нижней гранью ф-ии на этом сегменте.

**Следствие.** Если ф-ия непрерывна на данном сегменте, то для любого положительного ε найдется соответствующее δ такое, что колебание ф-ии на любом сегменте (содержащемся в рассматриваемом) длины, меньшей δ, будет меньше числа ε.

|  |  |
| --- | --- |
| **20** | **Понятие производной и дифференцируемости функции в точке.** |

Рассмотрим функцию, заданную на интервале (*a*, *b*). Пусть *х* — любая фиксированная точка этого интервала, а Δ*х* — произвольное число, настолько малое, что значение *х* + Δ*х* также находится на этом интервале. Это число Δ*х* называют **приращением аргумента**. **Приращением функции** в точке *х* называют число Δ*у* = *f*(*x* + Δ*x*) – *f*(*x*). Отношение Δ*у* / Δ*х* будем называть **разностным отношением**.

**Производной** функции в данной точке *х* называют предел при Δ*х* стремящемся к 0 разностного отношения (при условии, что этот предел существует).

Функция называется **дифференцируемой в точке *х***, если приращение Δ*у* этой функции в точке *х*, соответствующее приращению Δ*х*, может быть представлено в виде Δ*у* = *А*Δ*х* + α(Δ*х*)Δ*х*, где *А* — некоторое независимое от Δ*х* число, а α(Δ*х*) — бесконечно малая в точке 0 функция.

**Теорема.** Для того, чтобы ф-ия была дифференцируемой в точке *х*, необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке конечную производную. **Доказательство:**

1. *Необходимость.* Поделим выражение на Δ*х*. В точке Δ*х* = 0 правая (и левая) части имеют равный *А* предел. А предел левой части по определению равен значению производной в точке.
2. *Достаточность.* Обозначим как α(Δ*х*) разность разностного отношения и *f* ′(*x*). Эта ф-ия будет иметь при Δ*х*, стремящемся к нулю, предел, равный 0. Умножим соотношение на Δ*х* и получим Δ*у* = *f* ′(*x*) Δ*x* + α(Δ*х*) Δ*х*, что и требовалось доказать.

|  |  |
| --- | --- |
| **21** | **Правила дифф-я суммы, произведения и частного, сложной и обратной ф-ии. Формулы дифф-я простейших элементарных ф-ий.** |

**Теорема.** Пусть ф-ия φ(*t*) дифф-ма в точке *t*, а ф-ия *f*(*x*) – в точке *x* = φ(*t*). Тогда сложная ф-ия *y* = *f*(φ(*t*)) дифференцируема в точке *t*, причем ее производная в этой точке равна *f* ′(φ(*t*))φ′(*t*). **Доказательство:** придадим аргументу *t* приращение Δ*t*. Ему будет соответствовать Δ*х* = φ(*t* + Δ*t*) – φ(*t*), а этому приращению, в свою очередь, — приращение Δ*y* = *f*(*x* + Δ*x*) – *f*(*x*). Это можно представить в виде Δ*y* = *f* ′(*х*) Δ*x +* α(Δ*х*) Δ*х*. Поделим все на Δ*t* и докажем, что правая часть имеет предел. Отношение Δ*х* / Δ*t* имеет предел, равный φ′(*t*), a α(Δ*х*) — предел, равный 0. Все.

**Теорема.** Пусть ф-ия *f* возрастает и непрерывна в некоторой окрестности точки *х*. Пусть также она дифф-ма в этой точке и ее производная отлична от 0. Тогда в некоторой окрестности определена обратная функция, причем она дифференцируема в точке *y = f*(*x*) и ее производная в этой точке равна 1 / *f* ′(*х*). **Доказательство:** в силу условий обратная ф-ия будет определена, строго монотонна и непрерывна в некоторой окрестности точки *у*. Придадим ей некоторое приращение Δ*у*, отличное от 0. Тогда Δ*x* / Δ*у =* 1 / (Δ*у* / Δ*x*). Если приращение Δ*у* стремится к 0. Тогда и приращение Δ*x* тоже стремится к 0. Расписываем Δ*у* и получаем результат.

**Теорема.** Правила дифф-я суммы, произведения и частного верны. **Доказательство:** в лоб.

**Производная *y* = sin*x***. Расписать разность синусов.

**Производная *y =* cos*x***. Формула приведения.

**Производная** ***у =* tg*x***. Производная частного.

**Производная *у =* ctg*x***. Производная частного.

**Производная *у =* loga*x***. Расписать, домножить и поделить на *х*, далее — второй ЗП.

**Производная *у = а*х**. Расписать как для обратной ф-ии.

**Производная *y =* arcsin*x***. Обратная ф-ия.

**Производная *y =* arccos*x***. Обратная ф-ия.

**Производная** ***y =* arctg*x***. Обратная ф-ия.

**Производная *y =* arcctg*x***. Обратная ф-ия.

**Производная степенной ф-ии**. Расписать в логарифмической форме и как сложную ф-ию.

|  |  |
| --- | --- |
| **22** | **НАПИСАТЬ ЕГО** |

|  |  |
| --- | --- |
| **23** | **Производные и дифференциалы высших порядков, формула Лейбница. Дифференцирование функции, заданной параметрически.** |

Производная ф-ии *f*, дифференцируемой на интервале [*a*, *b*], сама определена на том же интервале и, возможно, дифференцируема в некоторых его точках. Если в какой-то точке интервала такая производная существует, то ее называют **производной второго порядка**. Далее аналогично можно ввести понятие третьей производной и т. д.

Легко вычислимы *n*-ые производные степенной ф-ии, показательной ф-ии (в частности и для основания, равного *е*). Путем применения форум приведения можно вычислить также производные sin*x*, cos*x*.

Для дробно-линейной ф-ии (*ax* + *b*) / (*cx* + *d*) будем иметь *n-*ой производной (*ad – bc*)(–1)n – 1 *n*!(*cx* + *d*)–(n + 1) *c*n – 1.

Выражение для первого дифференциала: *dy = f’*(*x*)*dx*. Предположим, что величина в правой части есть функция, дифференцируемая в данной точке *х*. Для этого нужно потребовать, чтобы *f* была дважды дифф-ма в точке *х*, а *х* был независимой переменной или представлял собой дважды дифференцируемую ф-ию некоторой независимой переменной. Тогда δ(*dy*) = δ[*f’*(*x*)*dx*]. Значение δ(*dy*) дифференциала от первого дифференциала, взятое при δ*х* = *dx*, называется **вторым дифференциалом** и обозначается *d*2*y*. Аналогично вводится дифференциал *d*n*y* *n*-го порядка.

Справедливо равенство *d*n*y* = *f* (n)(*x*)(*dx*)n для случая, когда *х* — независимая переменная. Во втором случае *d*n*y* = *f* (n)(*x*)*d*n*x*.

**Формула Лейбница:** (*uv*)(n) = *u*(n) *v* + *C*1n*u*(n – 1)*v*(1) + … + *uv*(n). **Доказательство:** индукция по *п*. База доказывается очевидным образом, шаг — в лоб.

Функция считается **заданной** **параметрически**, если обе переменные *х* и *у* заданы как ф-ии третьей переменной *t* (**параметр**): *x =* φ(*t*), *y =* ψ(*t*). Справедливы равенства: *dy* = ψ’(*t*) *dt*, *dx* = φ’(*t*) *dt*. Отсюда *y*’(*x*) = *dy* / *dx* = (ψ’(*t*) *dt*) / (φ’(*t*) *dt*).

|  |  |
| --- | --- |
| **24** | **Понятие возрастания в точке и локального экстремума функции.  Достаточное условие возрастания и необходимое условие экстремума в точке.** |

Рассмотрим ф-ию *f*, определенную всюду в некоторой окрестности точки *с*. Будем говорить, что ф-ия **возрастает в точке *с***, если найдется такая δ-окрестность точки *с*, что слева от точки *с* в ней значения функции меньше, чем в точке *с*, а справа — больше. Ф-ия имеет локальный экстремум в точке *с*, если в δ-окрестности этой точки значение *f*(*c*) — наибольшее или наименьшее.

**Достаточное условие возрастания ф-ии в точке.** Если ф-ия дифференцируема в точке *с* и ее производная в этой точке положительна, то ф-ия возрастает в этой точке. **Доказательство:** *f’*(*c*) = lim (*f*(*x*) – *f*(*c*)) / (*x* – *c*), на основании определения предела ф-ии по Коши для ε = *f’*(*c*) найдется δ такое, что | (*f*(*x*) – *f*(*c*)) / (*x* – *c*) – *f’*(*c*) | **<** *f’*(*c*) при 0 **<** | *x – c* | **<** δ. Раскрываем модули, получаем, что в проколотой δ-окрестности точки (*f*(*x*) – *f*(*c*)) / (*x* – *c*) >0. Это равносильно утверждению теоремы.

**Необходимое условие экстремума ф-ии в точке.** Если ф-ия дифференцируема в точке *с* и имеет в этой точке локальный экстремум, то *f’*(*c*) = 0. **Доказательство:** по условию в точке *с* существует конечная производная *f’*(*c*). Так как ф-ия имеет в точке *с* локальный экстремум, то она не может ни возрастать, ни убывать в ней. Соответственно, *f’*(*c*) = 0.

|  |  |
| --- | --- |
| **25** | **Теорема о нуле производной (теорема Ролля) и ее геометрический смысл.** |

**Теорема Ролля.** Пусть ф-ия *f*(*x*) непрерывна на сегменте [*a*, *b*] и дифференцируема на этом интервале. Пусть, кроме того, *f*(*a*) = *f*(*b*). Тогда внутри сегмента найдется точка *с* такая, что значение производной в этой точке равно 0. **Доказательство:** так как ф-ия непрерывна на сегменте, то она достигает на нем своего максимального и минимального значения (соответственно, *М* и *т*). Возможны два случая:

1. *М* = *т*. В этом случае *f*(*x*) = *M* = *m* = const. Поэтому производная равна 0 в любой внутренней точке сегмента.
2. *М* **>** *m*. Можно утверждать, что хотя бы одно из граничных значений достигается во внутренней точке *с* сегмента. Но тогда ф-ия *f*(*x*) имеет в этой точке *с* локальный экстремум. Поскольку ф-ия *f*(*x*) дифф-ма в точке *с*, то по ранее доказанному значение производной в ней равно 0.

**Геометрический смысл теоремы Ролля.** Если ординаты концов кривой равны, то, согласно теореме Ролля, на кривой существует точка, касательная к которой параллельна оси абсцисс.

|  |  |
| --- | --- |
| **26** | **Формула конечных приращений (теорема Лагранжа). Следствия теоремы Лагранжа.** |

**Теорема Лагранжа.** Если ф-ия непрерывна на сегменте [*a*, *b*] и дифференцируема на интервале (*a*, *b*), то внутри сегмента найдется точка *с* такая, что справедлива формула *f*(*b*) – *f*(*a*) = *f’*(*c*) (*b – a*). **Доказательство:** рассмотрим на сегменте [*a*, *b*] вспомогательную ф-ию *F*(*x*) = *f*(*x*) – *f*(*a*) – [(*f*(*b*) – *f*(*a*)) / (*b* – *a*)] (­*x – a*). Для ф-ии *F* выполнены все требования теоремы Ролля. Значит, внутри [*a*, *b*] найдется точка *с* такая, что *F’*(*c*) = 0. Это доказывает теорему Лагранжа.

**Геометрический смысл теоремы Лагранжа.** На кривой найдется такая точка, что касательная к ней будет параллельна отрезку, соединяющему концы кривой.

**Теорема.** Если ф-ия дифференцируема всюду на интервале (*a*, *b*) и всюду на этом интервале производная равна 0, то на этом интервале ф-ия постоянна. **Доказательство:** фиксируем точку *х*0 на этом интервале и рассматриваем произвольную точку *х* на этом интервале. Сегмент [*x*, *x*0] целиком принадлежит рассматриваемому интервалу, поэтому на нем выполняются необходимые для применения теоремы Лагранжа условия. Применяем. Получаем *f*(*x*0) = *f*(*x*), что и требовалось доказать.

**Теорема.** Для того, чтобы дифференцируемая на интервале (*a*, *b*) функция не убывала на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы производная этой функции была неотрицательной всюду на этом интервале. **Доказательство:**

1. *Достаточность.* Пусть *х*1 и *х*2 — любые две точки интервала, причем первая лежит левее второй. Ф-ия дифференцируема всюду на сегменте [*x*1, *x*2], поэтому можно применить теорему Лагранжа. Получим то, что надо.
2. *Необходимость.* Так как ф-ия не убывает на всем интервале, то она не может убывать ни в какой точке интервала. Тогда производная ни в одной точке не может быть отрицательной, что и требовалось доказать.

**Теорема.** Для того, чтобы ф-ия возрастала на интервале (*a*, *b*) достаточно, чтобы производная *f’*(*x*) была положительной всюду на этом интервале. **Доказательство:** все то же самое, как и для достаточности в предыдущей теореме.

**Лемма.** Пусть функция имеет конечную производную всюду на интервале (*c*, *c* + δ) и имеет правую производную *f’*(*c* + 0). Тогда, если производная имеет в точке *с* правый предел, то этот предел совпадает с правой производной. **Доказательство:** из существования правой производной вытекает существование равного нулю правого предела lim{*f*(*x*) – *f*(*c*)} при стремлении к *с* справа. Фиксируем любое *х* из интервала. Можно применить на сегменте [*c*, *х*] теорему Лагранжа. Переходим к пределу при стремлении к *с* справа. Правая (а значит, и левая) часть обязана стремиться к правому пределу производной в точке *с*. Но левая часть равна правой производной в точке *с*, что и требовалось доказать.

**Теорема.** Если функция имеет конечную производную всюду на интервале (*a*, *b*), то эта производная не может иметь на этом интервале ни точек устранимого разрыва, ни точек разрыва первого рода. **Доказательство:** если в некоторой точке *с* существуют конечные левый и правый пределы производной, то она непрерывна в этой точке (в силу доказанной леммы). Если же хотя бы одного из пределов не существует, то ф-ия терпит в этой точке разрыв второго рода.

|  |  |
| --- | --- |
| **27** | **Обобщенная формула конечных приращений (формула Коши).** |

**Формула Коши.** Если каждая из двух ф-ий *f* и *g* непрерывна на сегменте [*a*, *b*] и дифференцируема на интервале (*a*, *b*) и, кроме того, производная *g’* отлична от нуля всюду в этом интервале, то внутри сегмента найдется точка ξ такая, что справедлива формула (*f*(*b*) – *f*(*a*)) / (*g*(*b*) – *g*(*a*)) = *f’*(ξ) / *g’*(ξ). **Доказательство:** докажем сначала, что *g*(*a*) отлично от *g*(*b*). Если это не так, то по теореме Ролля внутри сегмента найдется такая точка, что в ней *g’* обращается в нуль, что противоречит условию. Рассмотрим теперь вспомогательную ф-ию *F*(*x*) = *f*(*x*) – *f*(*a*) – [(*f*(*b*) – *f*(*a*)) / (*g*(*b*) – *g*(*a*))](*g*(*x*) – *g*(*a*)). Эта ф-ия непрерывна на рассматриваемом сегменте и дифференцируема во всех его внутренних точках. Кроме того, очевидно, что *F*(*a*) = *F*(*b*) = 0. Тогда для *F*(*x*) применима теорема Ролля. Значит, внутри сегмента найдется точка ξ такая, что *F’*(*x*) = 0. Подставим и получим формулу Коши.

|  |  |
| --- | --- |
| **28** | **Раскрытие неопределенностей (правила Лопиталя).** |

Будем рассматривать ф-ии *f* и *g* на проколотой δ-окрестности точки *а*. На этом множестве ф-ии должны быть определы и дифференцируемы, кроме того, *g’* не должна обращаться в 0.

**Правило Лопиталя.** Если пределы *f* и *g* равны 0 при стремлении к точке *а* и существует предел отношения производных этих ф-ий, то существует и предел отношения самих ф-ий, причем эти пределы равны. **Доказательство:** рассмотрим произвольную последовательность значений аргумента, сходящуюся к *а* и состоящую из отличных от *а* элементов. Определим значения ф-ий в точке *а* равными 0. При этом ф-ии окажутся непрерывными всюду на δ-окрестности точки *а*. Рассмотрим произвольный сегмент, ограниченный точками *а* и *х*n. Обе ф-ии будут непрерывны на этом сегменте и дифференцируемы на соответствующем интервале, и производная *g’* не обращается там в 0. Применяем к этому сегменту формулу Коши. С учетом значения в точке *а* получим *f*(*x*n) / *g*(*x*n) = *f’*(ξn) / *g’*(ξn). Пусть теперь *n* стремится к бесконечности, тогда *x*n стремится к *а*. Поскольку ξn заключено между *а* и *x*n, то и ξn стремится к *а*. В силу существования предела отношения производных (по условию) и определению предела ф-ии по Гейне правая часть выражения имеет предел при *n*, стремящемся к бесконечности, причем он равен отношению значений производных в точке *а*. Тогда тот же самый предел имеет и *f*(*x*n) / *g*(*x*n). В силу определения по Гейне теорема верна.

**Второе правило Лопиталя.** Все то же самое, но для неопределенности вида ∞ / ∞. **Доказательство:** пусть существует конечный предел отношения производных *b*. Рассматриваем последовательность, односторонне сходящуюся к *а*. Применяем формулу Коши для двух произвольных элементов этой последовательности. Фиксируем ε и из условия сходимости последовательности получаем: *f’*(ξmn) / *g’*(ξmn) = *b* + αmn, где *m* — фиксировано, *п* **>** *m*, | αmn | **<** ε / 2. Из условий теоремы существует при *n*, стремящемся к бесконечности, предел lim [1 – *g*(*x*m) / *g*(*x*n)] / [1 – *f*(*x*m) / *f*(*x*n)] = 1. Это значит, что для положительного числа [ε / 2] / [| *b* | + ε / 2] и фиксированного *т* найдется номер *n*0 такой, что для всех *n* > *n*0: [1 – *g*(*x*m) / *g*(*x*n)] / [1 – *f*(*x*m) / *f*(*x*n)] = 1 + βmn, где | βmn | **<** [ε / 2] / [| *b* | + ε / 2]. Тогда *f*(*x*n) / *g*(*x*n) = *b* + (*b* + αmn) βmn + αmn. Переносим *b* в левую часть и все загоняем под модули (получаем нер-во), куда подставляем αmn и βmn. Получим, что хотели. Далее, если предел был бесконечностью, тогда рассматриваем предел обратного отношения (он равен 0). Вот.

Можно также свести к рассмотренным неопределенностям неопределенности вида 1∞, 0∞, ∞0. Все эти неопределенности имеют общий вид *f g*, где при *х*, стремящемся к *а* *f* стремится к 1, 0 или ∞, а *g* стремится к 0 или ∞. Логарифмируем *у* и получаем неопределенность вида ∞∙0. Загоним то, что стремится к бесконечности, в знаменатель (поделив 1 на эту ф-ию). Получим неопределенность вида 0 / 0, которую можно расписать по правилу Лопиталя.

|  |  |
| --- | --- |
| **29** | **Формула Тейлора с остаточным членом в общей форме (в форме Шлемильха-Роша).** |

**Теорема Тейлора.** Пусть ф-ия имеет в некоторой окрестности точки *а* производную порядка *п* + 1. Пусть, далее, *х* — любое значение аргумента из указанной окрестности, *р* — произвольное положительное число. Тогда между точками *а* и *х* найдется точка ξ такая, что справедлива следующая формула: *f*(*x*) = *f*(*a*) + [*f’*(*a*) / 1!] (*x* – *a*) + [*f’’*(*a*) / 2!] (*x* – *a*)2 + … + *R*n + 1(*x*). Здесь *R*n + 1 = [(*x – a*) / (*x* – ξ)]p[(*x* – ξ)n + 1 / (*n*! *p*)]*f*(n + 1)(ξ) — остаточный член в общей форме. **Доказательство:**

* обозначим символом φ(*х*, *а*) многочлен относительно *х* порядка *п*, фигурирующий в правой части формулы Тейлора. Далее, обозначим символом *R*n + 1(*x*) = *f*(*x*) – φ(*х*, *а*). Теорема будет доказана, если мы установим, что *R*n + 1(*x*) определяется формулой Тейлора;
* фиксируем любое значение *х* из окрестности, указанной в формулировке теоремы (пусть *х* **>** *a*). Обозначим через *t* переменную, имеющую областью своего изменения сегмент [*a*, *x*], и рассмотрим вспомогательную функцию ψ(*t*) вида ψ(*х*) = *f*(*x*) – φ(*x*, *t*) – (*x* – *t*)p*Q*(*x*), где *Q*(*x*) = *R*n + 1(*x*) / (*x* – *a*)p;
* ф-ия ψ на сегменте [*a*, *x*] непрерывна и дифференцируема во всех внутренних точках сегмента. Кроме того, ψ(*а*) = ψ(*х*) = 0. Значит, можно применить теорему Ролля и внутри сегмента [*a*, *x*] найдется точка ξ такая, что ψ*’*(ξ) = 0.
* найдем производную ψ*’*(*t*): ψ*’*(*t*) = –*f’*(*t*) + *f’*(*t*) / 1! + *f*(2) + … Все члены, кроме последних двух, уничтожаются: ψ*’*(*t*) = –[*f* (n + 1)(*t*) / (*n*!)] (*x – t*)n + *p*(*x* – *t*)p – 1*Q*(*x*). Подставляем *t =* ξ и получаем выражение для *Q*(*x*).

**Замечание.** Многочлен φ обладает следующим свойством: φ(n)(*a*, *a*) = *f* (n)(*a*).

**Формулой Маклорена** называют формулу Тейлора для точки *а* = 0.